2.7.18 Rovnice s neznámou pod odmocninou II

Předpoklady: 020717

Př. 1: Vyřeš rovnici $\sqrt{y+2}+2\sqrt{y-1}=4$

$\sqrt{y+2}+2\sqrt{y-1}=4 \quad /^2$

$\left(\sqrt{y+2}+2\sqrt{y-1}\right)^2=(4)^2$

$y+2+4\sqrt{y+2}\sqrt{y-1}+4(y-1)=16$

$5y+4\sqrt{y+2}\sqrt{y-1}=18$

$5y+4\sqrt{y+2}\sqrt{y-1}=18$ - v tomto stavu nemůžeme násobit, na levé straně by byl vzorec a zůstala by tam odmocnina $\Rightarrow$ převedeme y na levou stranu.

$4\sqrt{y+2}\sqrt{y-1}=18-5y \quad /^2$

$\left(4\sqrt{y+2}\sqrt{y-1}\right)^2=(18-5y)^2$

$16(y+2)(y-1)=324-180y+25y^2$

$16\left(y^2+y-2\right)=324-180y+25y^2$

$9y^2-196y+356=0$

$$y_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-196)\pm\sqrt{(-196)^2-4\cdot 9\cdot 356}}{2\cdot 9}=\frac{196\pm 160}{18}$$

$$y_1=\frac{196+160}{18}=\frac{178}{9}$$

$$y_2=\frac{196-160}{18}=2$$

Zkouška:

$y=\frac{178}{9}$

$$L=\sqrt{y+2}+2\sqrt{y-1}==\sqrt{\frac{178}{9}+2}+2\sqrt{\frac{178}{9}-1}=\frac{14}{3}+2\frac{13}{3}=\frac{40}{3}$$

$P=4$

$L\neq P \quad \Rightarrow \quad y=\frac{178}{9}$ není kořenem rovnice $\sqrt{y+2}+2\sqrt{y-1}=4$

$y=2$

$L=\sqrt{y+2}+2\sqrt{y-1}==\sqrt{2+2}+2\sqrt{2-1}=2+2\cdot 1=4$

$P=4$

$L=P$

$K=\{2\}$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je zařazen hlavně kvůli příkladu 2. Pokud nechcete se studenty příliš řešit problémy znamének při umocňování můžete obojí přeskočit.

Př. 2: Rozhodni, zda „zdánlivý" kořen $y=\frac{178}{9}$ vznikl při prvním nebo druhém umocňování rovnice.

Zdánlivé kořeny vznikají, když umocňujeme rovnice ve tvaru, kdy se obě strany rovnají dvěma navzájem opačným číslům $\Rightarrow$ tedy když obě strany rovnice nemají stejné znaménko.

1. umocňování: $\sqrt{y+2}+2\sqrt{y-1}=4 \quad /^2$

Levá strana: součet odmocnin $\Rightarrow$ nezáporné číslo, pravá strana 4 $\Rightarrow$ obě strany jsou nezáporné $\Rightarrow$ zdánlivý kořen nemůže vzniknout.

2. umocňování: $4\sqrt{y+2}\sqrt{y-1}=18-5y \quad /^2$

Levá strana: součin odmocnin $\Rightarrow$ nezáporné číslo, pravá strana může být kladná i záporná (v závislosti na hodnotě y) $\Rightarrow$ protože jsme s rovnicí žádné další umocňování neprováděli, musel zdánlivý kořen vzniknout při této úpravě.

Můžeme si to vyzkoušet i dosazením (z hlediska vyřešení příkladu je to zbytečné):

$$4\sqrt{y+2}\cdot\sqrt{y-1}=4\sqrt{\frac{178}{9}+2}\cdot\sqrt{\frac{178}{9}-1}=\frac{728}{9}$$

$$18-5y=18-5\cdot\frac{178}{9}=-\frac{728}{9}$$

Př. 3: Vyřeš rovnici $\sqrt{x^2+16}=5$. Postupuj tak, aby nebylo nutné dělat zkoušku.

Mohli bychom vypočítat kořeny bez podmínek a dělat zkoušku.
Zkusíme podmínky:
a) **odmocniny:**
$x^2+16\geq 0$ - platí vždy ($x^2\geq 0$) – všechny možné výsledky budou z hlediska definičního oboru odmocniny správné
b) **umocňování:**
Umocňujeme výchozí tvar rovnice, zkoumáme jeho znaménka:

- levá strana rovnice je větší než nula,
- pravá strana rovnice je větší než nula.

Obě strany jsou před umocněním kladné $\Rightarrow$ při umocňování nemůže přibýt kořen $\Rightarrow$ umocňování je ekvivalentní úprava, vše, co vyjde, je správně.

$$\sqrt{x^2+16}=5 \quad /^2$$

$$\left(\sqrt{x^2+16}\right)^2=(5)^2$$

$$x^2+16=25$$

$$x^2=9$$

$$x_1=3,\ x_2=-3$$

$$K=\{-3;3\}$$

Pedagogická poznámka: U předchozího příkladu je nutné ohlídat, aby studenti neměli v sešitě jeho pouhé mechanické vyřešení bez podmínek pro dosazení a umocňování. Zápis musí být takový, aby z něj jasně vyplývalo, že zkouška se dělat nemusí a oba kořeny rovnice $x^2 = 9$ můžeme prohlásit za kořeny rovnice $\sqrt{x^2+16} = 5$.

Př. 4: Vyřeš rovnici $2\sqrt{x^2-4x+4} = 4-2x$.

$2\sqrt{x^2-4x+4} = 4-2x \quad /^2$

$\left(2\sqrt{x^2-4x+4}\right)^2 = (4-2x)^2$

$4\left(x^2-4x+4\right) = 16-16x+4x^2$

$4x^2-16x+16 = 16-16x+4x^2$

$0 = 0$

Zdá se, že rovnici vyhovují všechna reálná čísla. Při postupu jsme umocňovali $\Rightarrow$ nevíme, která z nich jsou opravdová a která přibyla umocněním.

Zkoušku udělat nelze – nemůžeme vyzkoušet nekonečně mnoho čísel.

Nezbývá, než udělat podmínky:

a) **odmocniny:**

$x^2-4x+4 \geq 0$

Hledáme kořeny: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \dfrac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2-4\cdot 1\cdot 4}}{2\cdot 1} = \dfrac{4 \pm 0}{2} = 2$

$x^2-4x+4 = (x-2)^2 \geq 0$ - platí vždy (druhá mocnina je vždy větší nebo rovna nule) $\Rightarrow$ všechny možné výsledky budou z hlediska odmocniny správné.

b) **umocňování:**

Umocňujeme výchozí tvar rovnice $\Rightarrow$ zkoumáme znaménka stran:

- levá strana rovnice je nezáporná (dvojnásobek odmocniny),
- pravá strana rovnice může mít obě znaménka.

Umocňování je ekvivalentní úprava, když obě strany nemají opačná znaménka $\Rightarrow$ zjišťujeme, kdy je pravá strana nezáporná.

$4-2x \geq 0$

$4 \geq 2x$

$2 \geq x$

Pro $x \in \left(-\infty; 2\right\rangle$ je pravá strana nezáporná stejně jako levá, pro tato *x* je umocnění ekvivalentní úpravou $\Rightarrow$ tato *x* jsou řešením.

$K = \left(-\infty; 2\right\rangle$

Příklad je možné řešit i jinak, bez umocňování:

Upravíme levou stranu: $2\sqrt{x^2-4x+4} = 2\sqrt{(x-2)^2} = 2|x-2|$. (platí $\sqrt{x^2} = |x|$)

Získáváme tedy rovnici: $2|x-2| = 4-2x$, kterou samozřejmě řešit umíme.

Pedagogická poznámka: Studentů, kteří přijdou na to, že uvnitř odmocniny je druhá mocnina a je tedy možné ji odstranit, není zanedbatelně málo. Naprostá většina

z nich však zapomene na absolutní hodnotu a špatně píše:
$2\sqrt{x^2-4x+4}=2\sqrt{(x-2)^2}=2(x-2)$.

Př. 5: Vyřeš rovnici $2|x-2|=4-2x$.

$x\in(-\infty;2\rangle \Rightarrow x-2\le 0 \Rightarrow |x-2|=-x+2$

$2|x-2|=4-2x$

$2(-x+2)=4-2x$

$-2x+4=4-2x$

$0=0$ - rovnice platí pro všechna x z intervalu.

$K_1=(-\infty;2\rangle$

$x\in\langle 2;\infty) \Rightarrow x-2\ge 0 \Rightarrow |x-2|=x-2$

$2|x-2|=4-2x$

$2(x-2)=4-2x$

$2x-4=4-2x$ - zde je vidět, že v tomto intervalu jsou strany rovnice navzájem opačná čísla, po umocnění se budou rovnat.

$4x=8$

$x=2$

$K_2=\{2\}$

$K=(-\infty;2\rangle$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je samozřejmě okamžikem, kdy kontroluji, zda si studenti pamatují, jak se rovnice s absolutní hodnotou řeší. Výsledek na tabuli neukazuji, kdo příklad nedokáže spočítat sám, musí ho dodělat doma.

Pedagogická poznámka: Následující příklad je pouhým bonbónkem. Většinou si stihneme na konci hodiny maximálně popovídat, jak by bylo možné ho vyřešit, ale počítání zůstane na doma.

Př. 6: Vyřeš rovnici $2x+\sqrt{4x^2-12x+9}=\sqrt{16x^2-48x+36}+3$.

$2x+\sqrt{4x^2-12x+9}=\sqrt{16x^2-48x+36}+3$ - zdá se, že rovnici budeme muset umocnit, ale po prvním umocnění by odmocniny nezmizely, v rovnici by však už bylo x^2 (a po dalším umocnění x^4) $\Rightarrow$ zkusíme upravit odmocniny jinak.

$2x+\sqrt{4x^2-12x+9}=\sqrt{4(4x^2-12x+9)}+3$

$2x+\sqrt{4x^2-12x+9}=2\sqrt{4x^2-12x+9}+3$

$2x-3=2\sqrt{4x^2-12x+9}-\sqrt{4x^2-12x+9}$

$2x-3=\sqrt{4x^2-12x+9} \quad /^2$

$(2x-3)^2=\left(\sqrt{4x^2-12x+9}\right)^2$

$4x^2 - 12x + 9 = 4x^2 - 12x + 9$

$0 = 0$ $\Rightarrow$ stejná situace jako v předchozím příkladě. Rovnici můžeme napsat jako:

$2x - 3 = \sqrt{(2x-3)^2}$ (výraz pod odmocninou je druhou mocninou levé strany rovnice)

$\Rightarrow$ výraz pod odmocninou je vždy nezáporný $\Rightarrow$ do rovnice můžeme dosadit všechna čísla.
Falešné kořeny přibudou, když mají obě strany rovnice různá znaménka:

- pravá strana: vždy nezáporné číslo,
- levá strana: může být kladná i záporná

$\Rightarrow$ řešením jsou taková *x*, pro která je levá strana rovnice nezáporné číslo $\Rightarrow$ $2x - 3 \geq 0$ $\Rightarrow$ $x \geq \frac{3}{2}$.

$K = \left\langle \frac{3}{2}; \infty \right)$

Př. 7: Petáková:
strana 14/cvičení 20 a) d) e) g) h) j)

Shrnutí: Pokud po umocňování vyjde rovnice, která po úpravách vede k rovnosti $0 = 0$, neznamená to, že řešením jsou všechna reálná čísla.